ISSN 2225-6016

ВЕСТНИК

Смоленской государственной медицинской академии

Том 17, №4

2018

УДК 519.6-519.83-519.86

ТОЧКИ ГОМЕОСТАЗА И СПОСОБЫ ИХ НАХОЖДЕНИЯ. I

© Прудников И.М.
Смоленский государственный медицинский университет, 214019, Смоленск, ул. Крупской, 28

Резюме

Цель. Целью настоящей работы явилось разработка численных методов нахождения точек равновесия в модели, функции потерь каждого из объектов (субъектов) которой описываются выпуклыми функциями. Такие модели встречаются в медицине, экономике, теории игр, биологии. Знание точек равновесия важно для нашей жизнедеятельности, так как к ним стремятся все сложные структуры, какими являются любой высокоразвитый живой организм, наше общество, а также много конкурентные организации в экономике, биологии и теории игр.

Методика. Для сведения более сложного случая с негладкими функциями, описывающими состояние каждого из элементов системы, как ущерб, потери или прибыль, к случаю с гладкими функциями применяются усредняющие интегралы Стеклова, которые превращают негладкие функции в гладкие, к которым для поиска точек равновесия можно применять ранее разработанные численные методы. В процессе оптимизации диаметры множеств, по которым идет усреднение, уменьшаются.

Результаты. Построен численный метод поиска точек равновесия в более общем негладком случае. Доказана сходимость всех предельных точек к точкам равновесия.

Заключение. Сделан вывод о необходимости применения новых методов поиска точек равновесия по Нэшу в негладком случае, а также получение множества всех таких точек с целью дальнейшего его анализа и выбора наиболее оптимальных решений.

Ключевые слова: точки равновесия Нэша, метод покоординатного спуска, интеграл Стеклова, точка некооперативного равновесия, точки гомеостаза

POINTS OF HOMEOSTASIS AND THE METHOD TO FIND THEM

Prudnikov I.M.
Smolensk State Medical University, 28, Krupskoj St., 214019, Smolensk, Russia

Abstract

Objective. The purpose of this work was the development of numerical methods for finding equilibrium points in the model, damage, loss or income functions of the objects of which are described by convex functions. Such models can be found in medicine, economics, game theory, and biology. Knowledge of the equilibrium points is important for our life, since all complex structures, such as any highly developed living organism, our society and also multi-competitive organizations in economics, biology and game theory strive for them.

Methods. To reduce a more complicated case with nonsmooth functions describing the state of each element of the system as damage, loss, or profit, to a case with smooth functions, the Steklov average integrals are used that turn nonsmooth functions into smooth ones, for which previously developed numerical methods can be used for finding equilibrium points. In the process of optimization, the diameters of the sets over which the averaging takes place are decreased.

Results. A numerical method for finding the equilibrium points in a more general non-smooth case is constructed. The convergence of all limit points to the equilibrium points is proved.

Conclusion. It is concluded that it is necessary to apply new methods for finding Nash equilibrium points in the nonsmooth case, as well as to obtain a set of all the points in order to analyze it and select the most optimal solutions.

Keywords: equilibrium points by Nash, method of coordinate descent, Steklov integral, noncooperative equilibrium points, homeostasis points

Введение

Многие процессы в организме взаимосвязаны и стремятся к некоторому состоянию равновесия, когда выход из этого состояния ведет к ухудшению самочувствия: резкому увеличению температуры, давления, уровня холестерина в крови и так далее. С возрастом состояние равновесия меняется. Такое равновесное состояние в медицине называется гомеостазом. По определению гомеостаз – саморегуляция, способность открытой системы сохранять постоянство своего внутреннего состояния посредством скоординированных реакций, направленных на поддержание динамического равновесия [1].

Пусть физическое состояние организма описывается m функциями $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, …, $f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, зависящих от m параметров $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Тогда равновесное состояние организма – это такое состояние $x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_m$, для которого изменение одного из параметров, например x^*_j , ведет к увеличению соответствующей функций $f_j(\cdot)$, то есть

$$f_j(x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_j, \ldots, x^*_m) \le f_j(x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_{j-1}, x_j, x^*_{j+1}, \ldots, x^*_m) \qquad (1)$$

В экономике равновесные состояния были введены Дж. Нэшем. В 1950-1953 гг. им были опубликованы статьи и доказаны теоремы о существовании при определенных условиях ситуации равновесия [8-11].

Хорошо известно, что в природе все живые существа находятся в равновесии. Стоит только исчезнуть или резко уменьшиться в количестве какому-либо виду животных или насекомых, как это пагубно сказывается на состояние других видов. Проблема нахождения точки (состояния) равновесия в медицине, экономике и биологии тесно связана с теорией игр. Аналогично предыдущему определяется равновесное состояние в теории игр и экономике. Рассмотрим некоторую бескоалиционную игру из m лиц. Если игроки не образуют кооперацию, то на стратегии друг друга они повлиять не могут. Игрок i выбирает чистую стратегию x_i из выпуклого компактного множества D_i.

Образуем вектор $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, называемый мультистратегией, составленный из чистых стратегий $x_i \in S_i$, принадлежащий компактному множеству S_i. Считаем, что вектор x принадлежит выпуклому компактному множеству $S=S_1\times S_2\times \ldots\times S_m \in R^m$, составленному из декартова произведения выпуклых компактных множеств S_i, $i\in 1:m$. Все игроки выбирают стратегии независимо друг от друга. Здесь и далее R^m – m-мерное евклидово пространство.

Определение. Мультистратегия $x^*=(x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_m) \in S$ в некооперативной игре m лиц называется некооперативным равновесием, если для каждого $j\in 1:m$ и любого $x_j \in S_j$ выполняется неравенство (1).

Определения равновесного состояния в медицине, экономике и теории игр подобны друг другу. В 1950 г. Дж. Нэш доказал следующую теорему.

Теорема [8]. Пусть для любого $i\in 1:m$ множества D_i выпуклые компакты и функции $f_i(\cdot)$ – выпуклые по x_i. Тогда в некооперативной игре с m лицами существует ситуация равновесия.

Из определения состояния равновесия (1) понятно, что для его определения надо применять методы покоординатного спуска, так как, как следует из (1), точка x^*_i , $i \in 1:m$, является точкой локального минимума вдоль i-ой координаты.

Целью работы явилось разработка численных методов нахождения точек равновесия в модели, функции потерь каждого из объектов (субъектов) которой описываются выпуклыми функциями.

Методика

Опишем метод поиска состояния равновесия при условии, что функции $f_i(x_{-i}, x_i)$: $S \to R$, где $x_{-i} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)$, выпуклые по x_i. Будем считать, что для множества S для любого $i \in 1:m$ верно включение $\{x \in R^m \mid f_i(x) < f_i(x_0)\} \subset \text{int } S$, где x_0 – начальная точка. (int S - внутренность множества S). Это, очевидно, выполняется для коэрцитивных функций $f_i(\cdot)$. Под коэрцитивной функцией $\varphi(\cdot):R^m \to R$ понимают такую функцию, что для любых $x, g \in R^m$ верно предельное равенство

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\varphi(x+\alpha g)}{\alpha} = +\infty.$$

К коэрцитивным функциям относятся, например, сильно выпуклые функции [2,3].

Пусть найдена k-ая точка $z_k \in R^m$ оптимизационного процесса. Найдем точку z_{k+1}. Процесс будет состоять из m шагов. Положим в качестве координатных векторов следующие векторы $e_1=(1,0,0,\ldots,0)$, $e_2=(0,1,0,\ldots,0)$, …, $e_m=(0,0,0,\ldots,1)$.

Алгоритм поиска точки равновесия.

Шаг 1. Рассмотрим прямую $y_1(\alpha) = z_k+\alpha\, e_1$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, и найдем α_1 такое, что

$$f_1\left(y_1(\alpha_1)\right) = \min_{y_1(\alpha)\in S} f_1\left(y_1(\alpha)\right).$$

Такое α_1 будет существовать в силу сделанного предположения насчет коэрцитивности функций $f_i(\cdot)$, $i \in 1{:}m$.

Шаг 2. Рассмотрим прямую $y_2(\alpha) = z_k+\alpha\, e_2$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, и найдем α_2 такое, что

$$f_2\left(y_2(\alpha_2)\right) = \min_{y_2(\alpha)\in S} f_2\left(y_2(\alpha)\right).$$

Такое α_2 будет существовать в силу сделанного предположения насчет коэрцитивности функций $f_i(\cdot)$, $i \in 1{:}m$.

Щаг 3. И так далее до m-ого шага.

Шаг m. Рассмотрим прямую $y_m(\alpha) = z_k+\alpha\, e_m$, $\alpha \in(-\infty, +\infty)$, и найдем α_2 такое, что

$$f_m\left(y_m(\alpha_m)\right) = \min_{y_m(c)\in S} f_m\left(y_m(\alpha)\right).$$

Такое α_m будет существовать в силу сделанного предположения насчет коэрцитивности функций $fi(\cdot)$, $i \in 1{:}m$.

Из всех $f_1\left(y_1(\alpha_1)\right)$, $f_2\left(y_2(\alpha_2)\right)$, …, $f_m\left(y_m(\alpha_m)\right)$ выбираем наименьшее число. Пусть это будет $f_l\left(y_l(\alpha_l)\right), l \in 1{:}m$. Положим $z_{k+1} = y_l(\alpha_l)$. В итоге получим последовательность точек $\{z_k\}$ из компактного множества S.

Также можно строить модифицированный метод покоординатного спуска с постоянным шагом $\lambda>0$. Пусть найдена k-ая точка $z_k \in R^m$ оптимизационного процесса. Найдем точку z_{k+1}.

Шаг 1. Берем точку $y_1(\lambda) = z_k \pm \lambda\, e_1 \in S$ и вычислим значение функции $f_1(\cdot)$ в этой точке. Если для плюса или минуса $f_1(y_1(\lambda)) < f_1(z_k)$, то полагаем $z_{k+1}=y_1(\lambda)$. Если $f_1(y_1(\lambda)) \geq f_1(z_k)$ или $y_1(\lambda) \notin S$, то переходим к шагу 2.

Шаг 2. Берем точку $y_2(\lambda) = z_k \pm \lambda\, e_2 \in S$ и вычислим значение функции $f_2(\cdot)$ в этой точке. Если для плюса или минуса $f_2(y_2(\lambda)) < f_2(z_k)$, то полагаем $z_{k+1}=y_2(\lambda)$. Если $f_2(y_2(\lambda)) \geq f_2(z_k)$ или $y_2(\lambda) \notin S$, то переходим к шагу 3.

И так далее до m-ого шага.

Шаг m. Берем точку $y_m(\lambda) = z_k \pm \lambda\, e_m \in S$ и вычислим значение функции $f_m(\cdot)$ в этой точке. Если для плюса или минуса $f_m(y_m(\lambda)) < f_m(z_k)$, то полагаем $z_{k+1}=y_m(\lambda)$. Если $f_m(y_m(\lambda)) \geq f_m(z_k)$ или $y_m(\lambda) \notin S$, то уменьшаем шаг в два раза, т.е. полагаем $\lambda= \lambda/2$, и переходим к шагу 1. Процесс повторяется до тех пор, пока не будет выполняться условие $\lambda<\varepsilon$, где ε – наперед заданное малое положительное число.

Описанные процессы дают последовательность $\{z_k\}$, которая в общем случае может не сходиться к точке равновесия и не иметь предельные точки, являющиеся точками равновесия. Рассуждения, доказывающие это, следующие.

Дело в том, что для негладкой функции $f(\cdot)$ метод покоординатного спуска может не сходится к точке минимума [2]. Существуют соответствующие примеры на этот счет. Если нет в общем случае доказательства сходимости метода покоординатного спуска к точке минимума функции (есть контрпримеры), то и не может быть доказательства сходимости этого метода к точке равновесия для бескоалиционной игры m лиц. Мы можем построить оптимизационный процесс, который, очевидно, должен быть методом покоординатного спуска, и для которого каждая из функций $f_i(\cdot)$, $i\in 1{:}m$, будет уменьшаться вдоль соответствующей этой функции координатной оси. Но куда будет стремиться построенная последовательность точек $\{z_k\}$ без дополнительных предположений мы сказать не можем, так как градиенты, как функции точки, разрывны, а оценку величины изменения функций $f_i(\cdot)$, $i\in 1{:}m$, при переходе от k-ого шага к k+1-ому не представляется возможным, о чем будет написано подробнее ниже.

Приведем пример [2] выпуклой недифференцируемой функции, для которой метод покоординатного спуска не сходится к точке минимума. Мы не будем описывать сам оптимизационный процесс, а запишем конечный результат.

Пример. $X=(x_1, x_2)$, $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$, $f_1(X)=2x_1+x_2$, $f_2(X)=-x_1+x_2-3$. Минимизируемая функция $\varphi(x) = \max_{i\in 1:2} f_i(x)$.

Начальная точка $X_0=(0,0)$. Нетрудно видеть, что спуска ни по одной из координатных направлений из точки X_0 у функции $\varphi(\cdot)$ нет. Но точка X_0 не является точкой минимума, так как $\varphi(X_0)=0$, а в точке $X_1=(-1/2;\ 1/2)$ значение функции $\varphi(\cdot)$ меньше значения в точке X_0 : $\varphi(X_1)=-1/2$, $\varphi(X_0)=0$.

Мы докажем, что для гладкого случая, когда все функции $f_i(\cdot)$, $i\in 1:m$, гладкие, все предельные точки описанного выше метода являются точками равновесия.

Теорема 1. Пусть все $f_i(\cdot)$, $i\in 1:m$, -непрерывно дифференцируемые функции по переменной x_i на компактном множестве S , для которого $\{x \in R^m \mid f_i(x) < f_i(x_0)\} \subset S$ для любого $i\in 1:m$ и некоторой начальной точке x_0. Пусть также, функции $fi(\cdot)$ – выпуклые каждая по своей переменной x_i. Тогда описанный метод покоординатного спуска дает последовательность $\{z_k\}$, любая предельная точка которой - точка равновесия.

Доказательство. Функции $f_i(\cdot)$, $i\in 1:m$, ограничены в совокупности на множестве S. Покажем, что частные производные по x_i функции $f_i(\cdot)$, которую обозначим через $f'_{i,xi}(z_k) =(f'_i(z_k), e_i)$, стремится к нулю при $k \to \infty$. Доказательство будем вести от противного. Пусть

$$\lim_{k\to\infty}\left\|f'_{i,x_i}(z_k)\right\| \neq 0 \qquad (2)$$

для какого-то i. Имеет место разложение

$f_i(z_k + \lambda e_i)= f_i(z_k) + (f'_i (z_k), \lambda e_i)+o_{ik}(\lambda)$,

где функции $o_{ik}(\cdot)$ удовлетворяют условию: $o_{ik}(\lambda)/ \lambda \to 0$ при $\lambda \to 0$ равномерно по k. Если бы выполнялось неравенство (2), то нашлось бы λ, для которого

$$(f'_i (z_k), \lambda e_i)<-a,\ a>0. \qquad (3)$$

Неравенство (3) означает, что вдоль направлений e_i или – e_i мы можем уменьшить значение функции $f_i(\cdot)$. Действительно,

$(f'_i (z_k), \lambda e_i)+o_{ik}(\lambda) = \lambda ((f'_i (z_k), e_i) + o_{ik}(\lambda)/ \lambda)$.

Поскольку $o_{ik}(\lambda)/ \lambda \to 0$ при $\lambda \to 0$, то для достаточно малых λ верно неравенство

$(f'_i (z_k), e_i) + o_{ik}(\lambda)/ \lambda) < -a/2$,

а поэтому для малых λ

$$f_i(z_k + \lambda e_i) - f_i(z_k) < - \lambda a/2. \qquad (4)$$

Вследствие равномерной бесконечной малости функций $o_{ik}(\cdot)$ по i, k, что следует из непрерывной дифференцируемости функций $f_i(\cdot)$, $i\in 1:m$, неравенство (4) верно для всех i,k. Но последнее означает, что на каждом шаге k мы уменьшаем значение очередной функций $f_i(\cdot)$ как минимум на λ a/2. Поскольку все функции $f_i(\cdot)$, $i\in 1:m$, ограничены в совокупности на S, то приходим к противоречию с ограниченностью. Поэтому неравенство (2) не выполняется, а значит верен предел

$$\lim_{k\to\infty} f'_{i,x_i}(z_k) = 0$$

для всех $i\in 1$: m. В произвольной предельной точке z* последовательности $\{z_k\}$ в силу непрерывной дифференцируемости функций $f_i(\cdot)$, $i\in 1:m$, для всех $i\in 1:m$ выполняется равенство

$$\lim_{k\to\infty} f'_{i,x_i}(z^*) = 0$$

По условию функция $f_i(\cdot)$ – выпуклая по x_i, а поэтому необходимые условия являются и достаточными условиями минимума во внутренней точке множества S. Поэтому выполняются неравенства

$f_j(z^*_1, z^*_2, \ldots ,z^*_j,\ldots, z^*_m) \le f_j(z^*_1, z^*_2, \ldots, z^*_{j-1}, z_j, z^*_{j+1}, \ldots, z^*_m)$

для любого $j\in 1:m$, что означает по определению, что $z^*= (z^*_1, z^*_2, \ldots ,z^*_j,\ldots, z^*_m)$ – точка равновесия. Теорема доказана.

Замечание. Если предположение о включении в формулировке теоремы не выполняется, то последовательность $\{z_k\}$ может стремиться к граничной точке множества S.

Иначе обстоит дело, когда функции $f_i(\cdot)$, $i\in 1{:}m$, – недифференцирруемые. В этом случае бесконечно малые функции $o_{ik}(\cdot)$ не являются равномерно малыми по k. Поэтому оценка (4) не будет выполняться, а, следовательно, теорема для негладкого случая неверна. Как находить точки равновесия в этом случае?

Результаты исследования и их обсуждение

Воспользуемся идеями работы [6]. Будем считать, что $f_i(\cdot)$ – липшицевые функции по совокупности аргументов. Построим функции

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{\mu(D)} \int_D f_i(x+y)dy,$$

где D - произвольное выпуклое компактное множество, $0 \in \operatorname{int} D$, $\mu(D)$ –мера Лебега множества D, $i\in 1{:}\ m$.

Проверим, что функция $\varphi_i(\cdot)$ – выпуклая по переменной x_i. Возьмем две точки x_{i1} и x_{i2}. Запишем последовательность неравенств

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \alpha_1 x_{i1} + \alpha_2 x_{i2}, x_{i+1}, \dots, x_m) =$$

$$\frac{1}{\mu(D)} \int_D f_i(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_{i-1}+y_{i-1}, \alpha_1 x_{i1} + \alpha_2 x_{i2} + y_i, x_{i+1}+\ y_{i+1}, \dots, x_m+y_m)dy \le$$

$$\frac{\alpha_1}{\mu(D)} \int_D f_i(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_{i-1}+y_{i-1}, x_{i1}+y_i, x_{i+1}+\ y_{i+1}, \dots, x_m+y_m)dy +$$

$$\frac{\alpha_2}{\mu(D)} \int_D f_i(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_{i-1}+y_{i-1}, x_{i2}+y_i, x_{i+1}+\ y_{i+1}, \dots, x_m+y_m)dy =$$

$$= \alpha_1 \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i1}, x_{i+1}, \dots, x_m) + \alpha_2 \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i2}, x_{i+1}, \dots, x_m),$$

что означает выпуклость функции $\varphi_i(\cdot)$ по переменной x_i.

Функция $f_i(\cdot)$ почти всюду (ПВ) имеет производную по x_i на множестве S. В [6] доказано, что функция $\varphi_i(\cdot)$ – непрерывно дифференцируемая. В нашем случае $fi(\cdot)$ – выпуклая по x_i, поэтому $\varphi_i(\cdot)$ – выпуклая по x_i, непрерывно дифференцируемая функция, т.е.

$$\varphi'_{i,x_i}(x) = \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_i} = \frac{1}{\mu(D)} \int_D \frac{\partial f_i(x+y)}{\partial x_i}\, dy$$

непрерывная функция по x. Таким образом, $\varphi_i(\cdot)$, $i\in 1{:}m$, - выпуклые, непрерывно дифференцируемые по x_i $(\cdot)$, $i\in 1{:}m$, функции.

Покажем, что для любого $i \in 1{:}m$ и некоторой начальной точки x_0 множество $\{x \in R^m \mid \varphi_i(x) < f_i(x_0)\} \subset \operatorname{int} S + (-D)$ при выполнении неравенства в условии теоремы.

Итак, по условию теоремы верно включение. $\{x+y \in R^m \mid f_i(x+y) < f_i(x_0)\} \subset S$ для любого $i \in 1{:}m$. Проинтегрируем по $y\in D$ неравенство, стоящее в скобках. В итоге получим

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{\mu(D)} \int_D f_i(x+y)dy < \frac{1}{\mu(D)} \int_D f_i(x_0)dy = f_i(x_0).$$

Из $x+y\in S$ для любого $y\in D$, и $0\in\operatorname{int} D$ следует, что $x\in S + (-D)$. Нетрудно показать, что при условии коэрцитивности функций $f_i(\cdot)$, $i\in 1{:}m$, функции $\varphi_i(\cdot)$, $i\in 1{:}m$, также коэрцитивны.

Мы приходим к выполнению условий доказанной выше теоремы. Следовательно, для функций $\varphi_i(\cdot)$, $i \in 1{:}m$, можно применить приведенный алгоритм поиска точки равновесия. Мы покажем, что точка равновесия функций $\varphi_i(\cdot)$, $i\in 1{:}m$, есть $\varepsilon(D)$ точка равновесия функций $f_i(\cdot)$, $i\in 1{:}m$.

Определение. Назовем $\varepsilon(D)$ точкой равновесия функции $fi(\cdot)$, $i \in 1{:}m$, такую точку x^*_ε, для которой множеству $x^*_\varepsilon + D$ принадлежит точка равновесия $v^*=(v^*_1, v^*_2, \dots, v^*_m)$ функции $f_i(\cdot)$, $i \in 1{:}m$, по переменной x_i. т.е.

$f_i(v^*_1, v^*_2, \dots, v^*_m) \le fi(v^*_1, v^*_2, \dots, v^*_{i-1}, x_i, v^*_{i+1}, \dots, v^*_m) \quad \forall x_i \in S_i.$

Применим описанный выше алгоритм для нахождения точки равновесия для функций $\varphi_i(\cdot)$, $i \in 1{:}m$. Получим последовательность $\{v_k\}$. Так как условия доказанной выше теоремы выполняются, то любая предельная точка v^* этой последовательности является точкой равновесия функций $\varphi_i(\cdot)$,

$i \in 1{:}m$. Докажем следующую лемму.

Лемма 1. Любая предельная точка v^* последовательности $\{v_k\}$ является $\varepsilon(D)$ точкой равновесия функции $f_i(\cdot)$ по переменной x_i, $i \in 1{:}\ m$.

Доказательство. В точках равновесия $v^*=(v^*_1, v^*_2, \ldots, v^*_m)$ функций $\varphi_i(\cdot)$, $i \in 1{:}m$, с учетом всего сказанного выше верны равенства для $i\in 1{:}m$

$$\varphi'_{i,x_i}(v^*) = \frac{\partial \varphi_i(v^*)}{\partial x_i} = \frac{1}{\mu(D)} \int_D \frac{\partial f_i(v^*+y)}{\partial x_i}\, dy = 0 \qquad (5)$$

Интеграл в (5) с любой степенью точности $\delta>0$ можно представить в виде конечной суммы

$$\frac{1}{\mu(D)} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_i\left(v^*+y_j\right)}{\partial x_i}\mu\left(D_j\right), \qquad (6)$$

где $y_i \in D$, $N=N(\delta)$, D_i- подобласти разбиения области D, $\mu(D_i)$ – их меры, причем

$$\sum_{j=1}^{N} \mu\left(D_j\right) = \mu(D).$$

Сумма (6) есть выпуклая оболочка величин $\frac{\partial f_i\left(v^*+y_j\right)}{\partial x_i}$ с коэффициентами

$$\alpha_j = \frac{\mu(D_j)}{\mu(D)},\ \sum_{j=1}^{N} \alpha_j = 1,\ \alpha_j \geq 0,$$

т.е. для всех $i\in 1{:}m$

$$\frac{1}{\mu(D)} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_i\left(v^*+y_j\right)}{\partial x_i}\mu\left(D_j\right) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \frac{\partial f_i\left(v^*+y_j\right)}{\partial x_i}. \qquad (7)$$

Согласно равенству (5) сумма (7) может быть как угодно малой для больших N для всех $i\in 1{:}m$. Из полунепрерывности сверху субдифференциального отображения Кларка [5] для липшицевых функций $f_i(\cdot)$, $i\in 1{:}m$, следует существование точки $y_i=(y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{im})\in D$, для которой $0 \in \partial_{x_i} f_i(v^*+y_i)$ для $i\in 1{:}m$, где $\partial_{x_i} f_i\left(v^*+y_i\right)$ – субдифференциал функции $f_i(\cdot)$ в точке v^*+y_i по переменной x_i. Поскольку $f_i(\cdot)$ – выпуклая по x_i, то локальные точки минимума являются и глобальными точками минимума, а поэтому выполняется неравенство

$$f_i(v^*_1+y_{i1}, v^*_2+y_{i2}, \ldots, v^*_m+y_{im}) \leq f_i(v^*_1+y_{i1}, v^*_2+y_{i2}, \ldots, v^*_{i-1}+y_{i,i-1}, x_i, v^*_{i+1}+y_{i,i+1}, \ldots, v^*_m+y_{im})\ \forall\ x_i\in S_i.$$

Последнее означает, что точка v^*+y_i является $\varepsilon(D)$ точкой равновесия функции $f_i(\cdot)$ по переменной x_i. Лемма доказана.

Возникает вопрос: как найти точки равновесия с помощью функций $\varphi_i(\cdot)$, $i \in 1{:}m$? Сперва мы покажем, что субдифференциальное отображение $\partial_{x_i} f_i(\cdot)$ полунепрерывно сверху (ПН.СВ) по своим переменным. Дадим определение полунепрерывности сверху многозначного отображения (МО) $\partial_{x_i} f_i(\cdot)$ в точке [3, 5].

Определение. МО $\partial_{x_i} f_i(\cdot)$ называется ПН.СВ в точке y, если для любых последовательностей $\{y_k\}$ и $\{w_k\}$, $w_k\in\partial_{x_i} f_i\left(y_k\right)$, для которых $y_k \to y$, $w_k \to w$ при $k\to\infty$, следует включение $w\in\partial_{x_i} f_i(y)$.

Лемма 2. Субдифференциальное отображение $\partial_{x_i} f_i(\cdot)$ ПН.СВ в любой точке $x_i \in \operatorname{int} S_i$. (Здесь $\operatorname{int} S_i$ – внутренность множества S_i.)

Доказательство. Верно неравенство

$$f_i\left(y_k + ze_i\right) - f_i\left(y_k\right) \geq (w_k, ze_i) \qquad \forall z \in R. \qquad (8)$$

где $z\in R$, $w_k \in \partial_{x_i} f_i(y_k)$, (w_k, ze_i) – скалярное произведение векторов w_k и ze_i, e_i – i-ая координатная орта. Пусть $y_k\to y$, $w_k\to w$ при $k\to\infty$. Перейдем в неравенстве (8) к пределу по k. Из непрерывности функции $f_i(\cdot)$ по всем переменным следует неравенство

$$f_i(y + ze_i) - f_i(y) \geq (w, ze_i) \qquad \forall z \in R. \qquad (9)$$

Если бы неравенство (9) не выполнялось, то для достаточно больших k неравенство (8) также не выполнялось бы, чего быть не может. Но из неравенства (9) следует, что $w \in \partial_{x_i} f_i(y)$, а это в свою очередь по определению означает полунепрерывность сверху МО $\partial_x f_i(\cdot)$ в точке y. Итак, лемма доказана. Построим процесс поиска точки равновесия функций $f_i(\cdot)$, $i \in 1{:}m$, с помощью функций $\varphi_i(\cdot)$, $i \in 1{:}m$.

Шаг 1. Применяем описанный выше алгоритм поиска точки равновесия функций $\varphi_i(\cdot)$, $i \in 1{:}m$.

Шаг 2. В процессе поиска уменьшаем диаметр множества D_k, по которому идет интегрирование, т.е. $diam(D_k)=d(D_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Так если D_k – шары в R^m с центром в нуле и радиусом r_k, то

$r_k \to 0$ таким образом, чтобы r_k было больше λ_k, где λ_k – длина k-ого шага оптимизационного процесса, описанного выше. (Напомним, что согласно построенному оптимизационному процессу $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$). В итоге получаем последовательность точек $\{u_k\}$.

Теорема 2. Любая предельная точка описанной выше процедуры является точкой равновесия по Нэшу функций $f_i(\cdot)$, $i \in 1{:}m$.

Доказательство. По доказанному любая предельная точка получившейся последовательности точек на первом шаге 1 является $\varepsilon(D)$ точкой равновесия функций $f_i(\cdot)$, $i \in 1{:}m$. В результате применения шагов 1 и 2 мы получим последовательность $\{u_k\}$. Тогда согласно леммам 1 и 2 любая предельная точка u^* последовательности $\{u_k\}$ будет точкой равновесия функции $f_i(\cdot)$, $i \in 1{:}m$, по координате x_i, $i \in 1{:}m$. Действительно, $0 \in \partial_{x_i} f_i(u^* + y_i(D_k))$ для последовательностей множеств D_k и $y_i(D_k)$, для которых $diam(D_k) \to 0$ и $y_i(D_k) \to 0$ при $k \to \infty$ для всех i. Из ПН.СВ отображения $\partial_{x_i} f_i(\cdot)$ (Лемма 2) следует включение $0 \in \partial_{x_i} f_i(u^*)$. Но последнее и означает, что u^* – точка равновесия всех функций $f_i(\cdot)$, $i \in 1{:}m$, по координатам x_i, $i \in 1{:}m$, одновременно, что и требовалось доказать.

Обсуждение результатов исследования

В работе был применён метод нахождения точки равновесия как предельной точки последовательности, полученной в результате применения описанного выше численного метода, использующего градиенты (обобщенные градиенты) функции. Сам метод по этой причине в общем случае будет сходиться к точке равновесия не быстро, но его использование позволяет получить с минимальными промежуточными расчетами все возможные точки равновесия, если менять начальную точку. В дальнейшем будут проведены эксперименты на вычислительных машинах с целью получить множество всех точек равновесия. Интересны конфигурации этих множеств и время, за которое это можно сделать, а также поиск среди точек этих множеств Парето оптимальных решений.

В дальнейших статьях будет усовершенствован поиск точек равновесия по Дж. Нэшу с использованием матриц вторых смешанных производных (обобщенных матриц вторых смешанных производных) исходных функций. Такие методы будут сходиться намного быстрее описанного выше метода, но требуют на каждом шаге больше вычислений.

Существуют другие определения точек равновесия, например, точки равновесия по Бержу [4, 7], когда в бескоалиционной игре поведение игроков определяется максимальным (минимальным) выигрышем (проигрышем) каждого игрока при условии, что остальные игроки стараются помочь в достижении этой цели данному игроку. Нахождение точек равновесия по Бержу также представляет интерес.

Выводы

1. Дано обоснование применения новых оптимизационных методов поиска точек равновесия по Дж. Нэшу для негладкого случая.
2. Построен метод поиска точек равновесия по Жд. Нэшу с использованием усредненного интеграла Стеклова.
3. Доказано, что все предельные точки построенного оптимизационного процесса являются точками равновеия по Дж. Нэшу.

Литература (references)

1. Гомеостаз / Под ред. П.Д. Горизонтова – М.: Медицина. – 1981. – 576 с. [*Homeostaz* /Pod red. P.D. Gorizontova. Homeostasis / Ed. P.D. Gorizontova. – M.: Medicine. – 1981. – 576 p. (in Russian)]
2. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. – М: Наука, 1972. – 368 с. [Demyanov V.F., Malozemov V.N. *Vvedenie v minimaks.* Introduction to minimax. – Moscow: Nauka, 1972. – 368 p. (in Russian)]
3. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. – М.: Наука, 1981. – 384 с. [Demyanov V.F., Vasilev L.V. *Nedifferenciruemaya optimizaciya.* Nonsmooth optimization. – Moscow: Nauka, 1981. – 384 p. (in Russian)]
4. Жуковский В.И., Макаркина Т.В., Бельских Ю.А. Существование точек равновесия по Бержу // Таврический вестник информатики и математики. – 2018. – Т.38, №1. – С. 7-16. [Ghukovsky V.I., Makarkina T.V., Belskich Yu.A. *Tavricheskij vestnik informatiki i matematiki.* Tavricheskiy Bulletin of informatics and mathematics. – 2018. – V.38, N1. – P. 7-16. (in Russian)]
5. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Наука, 1988. – 280с.[Clark F. *Optimizaciya i negladkij analiz.* Optimization and nonsmooth analysis. – Moscow: Nauka,1988. – 280 p. (in Russian)]
6. Прудников И.М. $C^2(D)$ интегральные аппроксимации негладких функций, сохраняющие $\varepsilon(D)$ точки локальных экстремумов. // Труды Института математики и механики. УрО РАН. Доп. Номер. Екатеринбург: ИММ УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 5. – С. 159-169. [Prudnikov I.M. *$C^2(D)$ integralnaya aproksimaciya negladkich funkcij, sohranyauchaya $\varepsilon(D)$ tozki localnih ekstremumov.* $C^2(D)$ integral approximations of nonsmooth functions preserving $\varepsilon(D)$ points of local extremums. – Ural Branch of RAN. Additional Issue. Ecaterinburg: Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of RAN. – 2010. – V.16, N5. – P. 159-169. (in Russian)]
7. Berge C. Theory generule des jeux a n personnes. – Paris: Gauthier Villar, 1957. – 114 c.
8. Nash J.F. Equilibrium points in n-person games // Proceedings of the National Academy of Sciences. – 1950. – V.36.– P. 48-49.
9. Nash J.F. The bargaining problem // Econometrics. – 1950. – V.18. – P. 155-162.
10. Nash J.F. Non-cooperative games // Annals of Mathematics. – 1951. – V.54. – P. 286-295.
11. Nash J.F. Two-person cooperative games // Econometrics. – 1953. – V.21. – P. 128-140.

Информация об авторе

Прудников Игорь Михайлович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник научно-исследовательского центра ФГБОУ ВО «Смоленский государственный медицинский университет» Минздрава России. E-mail: prudnik09@yandex.ru